



TITLE:

Type 2 ObjectでのRecursion (ブール代数値の解析学と超準解析)

AUTHOR(S):

篠田, 寿一

CITATION:

篠田, 寿一. Type 2 ObjectでのRecursion (ブール代数値の解析学と超準解析). 数理解析研究所講究録 1978, 336: 101-116

ISSUE DATE:

1978-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104212>

RIGHT:

Type 2 object の recursion

名大 理 篠田 新一

1. Kleene [3] による finite type の recursion theory を type 2 object に制限したものを考える. ω の元を type 0 object, ω^ω の元を type 1 object, $\{F \mid F: \omega^\omega \rightarrow \omega\}$ の元を type 2 object という. type 0 object を a, b, c, \dots , type 1 object を $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, type 2 object を F, G, H, \dots で表わすことにする. α, a, c, \dots により $(a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ のように type 0 および type 1 の変数の有限列を表わすものとする. ω の部分集合に対して,

$$\Pi'_1 = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1), \quad \Delta'_1 = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

なる関係はよく知られているが、これは Kleene の object E での recursion theory の言葉でいえば、

$$E\text{-semirecursive} = \Sigma_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

$$E\text{-recursive} = \Delta_1 \text{ on } L(\omega_1)$$

となるが、これを一般の type 2 object の場合に拡張しよう

というのが目標である.

type 2 object F に対して、次のような scheme により導入される partial function を partial F -recursive function という:

Scheme	Index
(S1) $\varphi(x, \sigma) \simeq x+1$	$\langle 1 \langle n_0+1, n_1 \rangle \rangle$
ここで、 n_0 (n_1) は σ に含まれる type 0 (type 1) 変数の個数である. 以下の各 scheme においても同様.	
(S2) $\varphi(\sigma) \simeq g$	$\langle 2 \langle n_0, n_1 \rangle g \rangle$
(S3) $\varphi(x, \sigma) \simeq x$	$\langle 3 \langle n_0+1, n_1 \rangle \rangle$
(S4) $\varphi(\sigma) \simeq \psi(\chi(\sigma), \sigma)$	$\langle 4 \langle n_0, n_1 \rangle p, g \rangle$

ここで、 p は ψ の index, g は χ の index である.

$$(S5) \quad \varphi(a, b, x, y, \sigma) = \begin{cases} a & \text{if } x=y \\ b & \text{if } x \neq y \end{cases} \quad \langle 5 \langle n_0+4, n_1 \rangle \rangle$$

$$(S6) \quad \varphi(x, y, \sigma) \simeq S'(x, y) \quad \langle 6 \langle n_0+2, n_1 \rangle \rangle$$

ここで、 $S'(x, y) = \langle 4, [(x)_2], x, \langle 2, [(y)_2], y \rangle \rangle$

$$(S7) \quad \varphi(\sigma) \simeq \psi(\sigma_j) \quad \langle 7 \langle n_0, n_1 \rangle j, k, p \rangle$$

ここで σ_j は σ の第 k 番目の type j の変数を先頭に出したものである.

$$(S8) \quad \varphi(x, \alpha, \sigma) \simeq \alpha(x) \quad \langle 8 \langle n_0+1, n_1+1 \rangle \rangle$$

$$(S9) \quad \varphi(\sigma) \simeq F(\lambda x \psi(x, \sigma)) \quad \langle 9 \langle n_0, n_1 \rangle, p \rangle$$

$$(S10) \quad \varphi(x, \alpha, n) \simeq \{x\}^F(\alpha) \quad \langle 10 \langle n_0 + m_0, n_1 + m_1 \rangle \langle n_0, n_1 \rangle \rangle$$

ここで $\{x\}^F$ は index x の part. F -rec. func. また n は m_0 個の type 0 変数, m_1 個の type 1 変数からなっている.

F -recursive function, F -recursive predicate などとは通常のごとく定義される.

定理 1.1 primitive recursive function S^m で

$$\{S^m(z, x_1, \dots, x_m)\}^F(\alpha) \simeq \{z\}^F(x_1, \dots, x_m, \alpha)$$

となるものが存在する.

これから直ちに次の定理が得られる.

定理 1.2 $\psi(z, \alpha)$ が part. F -rec. func. ならば,

$$\{e\}^F(\alpha) \simeq \psi(e, \alpha)$$

なる e が存在する.

この定理 1.2 を F -Recursion Theorem という.

2. E により特に

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists n \alpha(n) = 0 \\ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる type 2 object を表わす. E が F -recursive であるとき, F を normal object という. 以下 type 2 object としては normal なものばかりを考える. $\{z\}^F(\alpha) \downarrow \alpha$ とき, ordinal $|z, \alpha|^F$ を次のように定義する:

(1) $(z)_0 = 1, 2, 3, 5, 6, 8$ のとき, $|z, \sigma|^F = 0$

(2) $(z)_0 = 4$ のとき, $|z, \sigma|^F = \max(|(z)_3, \sigma|^F, |(z)_2, \{(z)_3\}^F(\sigma), \sigma|^F) + 1$

(3) $(z)_0 = 7$ のとき, $|z, \sigma|^F = |(z)_4, \sigma, \sigma|^F + 1$

(4) $(z)_0 = 9$ のとき, $|z, \sigma|^F = \sup_{n < \omega} (|(z)_2, n, \sigma|^F + 1)$

(5) $(z)_0 = 10$ のとき, $|z, x, \sigma, \sigma|^F = |x, \sigma|^F + 1$

また $\{z\}^F(\sigma) \uparrow$ のときには $|z, \sigma| = \infty$ としておく. 次の定理は normal type 2 object での recursion theory において基本的なものである.

定理 2.1 (Gandy) 次のような part. F-rec. func. $\chi(z, \sigma, w, \sigma)$ が存在する:

$\{z\}^F(\sigma) \downarrow$ または $\{w\}^F(\sigma) \downarrow$ ならば, $\chi(z, \sigma, w, \sigma) \downarrow$ であって

$$\chi(z, \sigma, w, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } |z, \sigma|^F \leq |w, \sigma|^F \\ 1 & \text{if } |z, \sigma|^F > |w, \sigma|^F \end{cases}$$

が成り立つ.

この定理の系として以下のものが得られる. (これらの証明は Hinman [2] の Chap VI を参照).

predicate $P(\sigma)$ は part. F-rec. func. の domain として表わされるとき, F-semirecursive とよばれる. これは通常の recursion theory における recursively enumer-

able に対応するものである。従って F -recursively enumerable ともいわれる。

系 2.2 $P(x, \alpha)$ が F -semirec. ならば, part. F -rec. func. $\theta(\alpha)$ で

$$\exists x P(x, \alpha) \leftrightarrow \theta(\alpha) \downarrow$$

$$\exists x P(x, \alpha) \rightarrow P(\theta(\alpha), \alpha)$$

を満たすものが存在する。

系 2.3 $P(x, \alpha)$ が F -semirec. ならば $\exists x P(x, \alpha)$ も F -semirec. である。

系 2.4 P が F -rec. $\Leftrightarrow P, \neg P$ が F -semirec.

系 2.5 φ が part. F -rec. $\Leftrightarrow \varphi$ のグラフが F -semirec

これらから、 F -semirec. set に対する Reduction Theorem, co- F -semirec. set に対する Separation Theorem が成り立つ。また次のような Luckham の定理の一般化が成り立つ。

系 2.6 $A \subseteq \omega$ が F -semirec. な無限集合ならば、 A は無限部分集合で F -rec. なものを含む。

(証明) F -semirec. predicate $\forall m \exists n [m < n \ \& \ n \in A]$ に対し系 2.2 を用いればよい。□

定理 2.7 Q_1, \dots, Q_m が F -semirec. で、 $\Phi(x, Q_1, \dots, Q_m, S)$ が Q_1, \dots, Q_m, S positive formula ならば、

Φ によって定義される monotone operator の最小の fixed point I_Φ は F -semirec. である.

(証明) $P(z, x) \equiv \Phi(x, Q_1, \dots, Q_m, \{y \mid |z, z, y|^F < |z, z, x|^F\})$ とすると, P は F -semirec. 従って

$$P(z, x) \leftrightarrow \{e\}^F(z, x) \downarrow$$

となる e が存在する. そこで $Q(x) \equiv P(e, x)$ とすると, Q は F -semirec. である. $|x|_\Phi$ に関する帰納法により,

$$x \in I_\Phi \rightarrow Q(x)$$

また $|e, e, x|^F$ に関する帰納法により

$$Q(x) \rightarrow x \in I_\Phi$$

がいえる. 従って $I_\Phi = Q$ となつて, I_Φ が F -semirec. であることがいえた. \square

3. Shoenfield [5] は次のような ordinal notation system $(O^F, | \cdot |_0^F, <_0^F, H_a^F)$ を定義した.

$$(1) \quad 1 \in O^F, \quad |1|_0^F = 0, \quad \forall x (\neg x <_0^F 1), \quad H_1^F = \omega$$

$$(2) \quad a \in O^F \text{ ならば, } b = 2^a \in O^F \text{ であつて, } |b|_0^F = |a|_0^F + 1, \quad x <_0^F b \leftrightarrow x <_0^F a \vee x = a, \quad H_b^F = \{x \in \omega \mid F(\lambda n \{(x)_0\}^{H_a^F(n)}) \simeq (x)_1\}$$

$$(3) \quad a \in O^F \text{ であつて, } \varphi = \lambda n \{e\}^{H_a^F(n)} \text{ が total かつ, } \varphi(0) = a, \quad \forall n [\varphi(n) \in O^F \ \& \ \varphi(n) <_0^F \varphi(n+1)] \text{ ならば,}$$

$b = 3^a 5^c \in O^F$ であって, $|b|_o^F = \sup_{n < \omega} |\varphi(n)|_o^F$, $x <_o^F b \iff$
 $\iff \exists n \ x <_o^F \varphi(n)$, $H_b^F = \{x \in \omega \mid (x)_1 \in H_{\varphi((x)_0)}^F\}$.

定理 3.1 (Shoenfield) $A \subseteq \omega^n$ に対して,

A が F -rec. $\iff \exists a \in O^F [A \text{ is rec. in } H_a^F]$

定理 3.2 (Shoenfield) 次のような prim. rec. func.

L が存在する: $a, b \in O^F$, $|a|_o^F \leq |b|_o^F$ ならば, H_a^F は
 recursive in H_b^F with index $L(a, b)$.

次の 2 つの Lemma は通常の Recursion Theorem および
 Course-of-values recursion の適用により、容易に証明
 できる。

補題 3.3 適当に prim. rec. func. η をとれば、各 a
 $\in O^F$ に対し、 $\lambda x \{\eta(a)\}^F(x)$ は H_a^F の特性関数となる。

補題 3.4 次のような prim. rec. func. π が存在する:
 $a \in O^F$ ならば、 $\lambda x \{\pi(a)\}^F(x)$ は $\{x \in O^F \mid x <_o^F a\}$ の
 特性関数である。

定理 3.5 $<_o^F$ は F -semirec. predicate である。

(証明) S -positive formula $\Phi(x, a, S)$ を次のように
 定める:

$$\begin{aligned} \Phi(x, a, S) \equiv & S(1, 2) \ \& \ [a = 2^{(a)_0} \ \& \ (a)_0 \neq 0 \ \& \ (x = (a)_0 \\ & \vee S(x, (a)_0)) \] \ \vee \ [a = 3^{(a)_1} 5^{(a)_2} \ \& \ a \neq 1 \\ & \ \& \ \lambda t \{\eta((a)_1)\}^F(t) \text{ is total} \ \& \ \forall n (\{(a)_2\}^{\lambda t \{\eta((a)_1)\}^F(t)}_{(n)} \end{aligned}$$

is defined) & $\{(a_2)^\lambda\}^{\lambda t \{ \eta(a_1) \}^{F(t)}}(0) = (a_1)$
 & $\forall n \mathcal{S}(\{(a_2)^\lambda\}^{\lambda t \{ \eta(a_1) \}^{F(t)}}(n), \{(a_2)^\lambda\}^{\lambda t \{ \eta(a_1) \}^{F(t)}}(n+1))$
 & $\exists n \mathcal{S}(x, \{(a_2)^\lambda\}^{\lambda t \{ \eta(a_1) \}^{F(t)}}(n)) \big] \}$

上の補題および $<_0^F$ の定義から分かるように, $<_0^F = I_{\mathbb{N}}$.

従って, 定理 2.7 から $<_0^F$ は F -semirec. である. \square

系 3.6 O^F は complete F -semirec. set である.

(証明) $a \in O^F \iff a = 1 \vee 1 <_0^F a$ であるから, O^F は F -semirec. である. Shoenfield による定理 3.1 の証明を検討することにより, prim. rec. func. θ で,

$$\{z\}^F(a_1, \dots, a_n) \downarrow \iff \theta(z, \langle a_1, \dots, a_n \rangle) \in O^F$$

なるものが存在する. 従って $P \subseteq \omega$ が F -semirec. ならば

$$P(x) \iff \{e\}^F(x) \downarrow \text{ と表わせるから}$$

$$P(x) \iff \theta(e, \langle x \rangle) \in O^F$$

故に O^F は complete F -semirec. set である. \square

ω_1^F により最初の non F -recursive ordinal を表わすことにする. すなわち

$\omega_1^F = \sup \{o(\prec) \mid \prec \subseteq \omega \times \omega \text{ is an } F\text{-rec. well-ordering}\}$
 のとき,

定理 3.7 $\sup \{|a|_0^F : a \in O^F\} = \omega_1^F$

(証明) 補題 3.4 により, $a \in O^F$ ならば, $<_0^F$ を $\{x \mid x <_0^F a\}$ に制限したものは order type $|a|_0^F$ の F -rec.

well-ordering になる。従って $|a|_0^F < \omega_1^F$. 逆に $< \leq \omega \times \omega$ を任意の F -rec. well-ordering とすると、定理 3.1 により

$$\exists a \in O^F \quad < \text{ is recursive in } H_a^F$$

従って $o(<) < \omega_1^{H_a^F}$. $O^{H_a^F}$ を Kleene の notation system O を H_a^F に相対化したものとすると、Recursion Theorem を用いることにより、次のような prim. rec. func. π がとれる:

$$(i) \quad x \in O^{H_a^F} \rightarrow \pi(x) \in O^F$$

$$(ii) \quad |x|_0^{H_a^F} \leq |\pi(x)|_0^F$$

従って $o(<) < \omega_1^{H_a^F} \leq \omega_1^F$. \square

補題 3.8 次のような prim. rec. func. $\varphi_<, \varphi_{\leq}$ が存在する: $a \in O^F$ ならば, $\lambda x \{ \varphi_<(a) \}^F(x)$ は $\{x \in O^F: |x|_0^F < |a|_0^F\}$ の特性関数である. (φ_{\leq} は $<$ を \leq にかえたもの)

これは補題 3.3, 3.4 の証明と同様に、Recursion Th. と Course-of-values recursion の適用により証明できる.

定理 3.9 (Boundedness Theorem)

$\theta: \omega \rightarrow \omega$ が F -rec. func. で $A = \{a \in \omega \mid \theta(a) \in O^F\}$ ならば,

$$A \text{ が } F\text{-rec.} \iff \sup_{a \in A} |\theta(a)|_0^F < \omega_1^F$$

(証明) \Rightarrow . もし $\sup_{a \in A} |\theta(a)|_0^F = \omega_1^F$ ならば,

$$b \notin O^F \iff \forall a [a \in A \rightarrow \{ \varphi_<(\theta(a)) \}^F(b) \simeq 1]$$

従って $\neg O^F$ は F -semirec. である. 系 2.4 により O^F は F -rec. になる. これは O^F が complete F -semirec. set であることに反する.

←. $\sup_{a \in A} |\theta(a)|_0^F < |b|_0^F$ なる $b \in O^F$ をとれば,

$$a \in A \iff \{\varphi_k(b)\}^F(\theta(a)) = 0$$

従って A は F -rec. である. \square

4. ここでは, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は順序数を表わすものとする. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_8$ を Gödel [6] の operation とする. これらに

$$\mathcal{F}_9(x, y) = F \cap x$$

を付け加えることにより Gödel と同様にして, F -constructible sets が定義できる. すなわち $J: 10 \times O_n \times O_n \rightarrow O_n$ を Gödel の J を modify したものとし, $J(i, \alpha, \beta) = \gamma$ のとき $N(\gamma) = i$, $K_1(\gamma) = \alpha$, $K_2(\gamma) = \beta$ とする. そして,

$$C_F(\gamma) = \{C_F(\delta) \mid \delta < \gamma\} \quad \text{if } N(\gamma) = 0$$

$$C_F(\gamma) = \mathcal{F}_i(C_F(K_1(\gamma)), C_F(K_2(\gamma))) \quad \text{if } N(\gamma) = i > 0$$

とする. $L_F(\omega_1^F) = \{C_F(\gamma) \mid \gamma < \omega_1^F\}$ とおく. 今 $a \in O^F$ に対して, $C_F(|a|_0^F)$ を簡単のため C_a と書くことにする.

補題 4.1 $J^+(i, a, b, c) \equiv i < 10 \ \& \ a, b, c \in O^F \ \& \ J(i, |a|, |b|) = |c|$

$$J^-(i, a, b, c) \equiv i < 10 \ \& \ a, b, c \in O^F \ \& \ J(i, |a|, |b|) \neq |c|$$

とすると J^+ , J^- は F -semirec. である.

(証明) $J(i, \alpha, \beta) = \gamma$ を O^F の元で翻訳したものを $\bar{\Phi}(i, a, b, c, S)$ とすると $\bar{\Phi}$ は S -positive になる. そして $J^+ = I_{\bar{\Phi}}$ であるから定理 2.7 により J^+ は F -semirec. である.

$$J^-(i, a, b, c) \equiv c \in O^F \ \& \ \exists c' [J^+(i, a, b, c') \ \& \ c \neq c']$$

であるから J^- も F -semirec. である. \square

補題 4.2 $N^+(c, i) \equiv c \in O^F \ \& \ N(|c|) = i$

$$N^-(c, i) \equiv c \in O^F \ \& \ N(|c|) \neq i$$

とすると N^+, N^- は F -semirec. である. $K_1^+, K_1^-, K_2^+, K_2^-$ についても同様.

(証明) $N^+(c, i) \leftrightarrow \exists a, b \ J^+(i, a, b, c)$ であるから, N^+ は F -semirec. また $N^-(c, i) \leftrightarrow \exists i' [J^+(i', a, b, c) \ \& \ i \neq i']$ であるから N^- も F -semirec. \square

補題 4.3 $P_e^+(a, b) \equiv a, b \in O^F \ \& \ C_a \in C_b$

$$P_e^-(a, b) \equiv a, b \in O^F \ \& \ C_a \notin C_b$$

$$P_{=+}(a, b) \equiv a, b \in O^F \ \& \ C_a = C_b$$

$$P_{=-}(a, b) \equiv a, b \in O^F \ \& \ C_a \neq C_b$$

とするとこれらはすべて F -semirec. である.

(証明) 4.1, 4.2 を用いこれらを同時に定義する positive inductive operator をとる. 定理 2.7 によりこれらはすべて F -semirec. である. \square

補題 4.4 Φ が $\Delta_0(F)$ -formula ならば,

$$P_{\Phi}^{+}(a_1, \dots, a_n) \equiv a_1, \dots, a_n \in O^F \& \Phi(C_{a_1}, \dots, C_{a_n})$$

$$P_{\Phi}^{-}(a_1, \dots, a_n) \equiv a_1, \dots, a_n \in O^F \& \neg \Phi(C_{a_1}, \dots, C_{a_n})$$

は F -semirec. である.

(証明) まず Φ が F を含まない場合を証明する. Φ の構成に関する帰納法による. $\Phi = \neg \Psi$ のとき, $P_{\Phi}^{+} \equiv P_{\Psi}^{-}$, $P_{\Phi}^{-} \equiv P_{\Psi}^{+}$. $\Phi = \Psi \vee \Theta$ のとき, $P_{\Phi}^{+} \equiv P_{\Psi}^{+} \vee P_{\Theta}^{+}$, $P_{\Phi}^{-} \equiv P_{\Psi}^{-} \& P_{\Theta}^{-}$. $\Phi(v) = \exists w \in v \Psi(w)$ のとき,

$$P_{\Phi}^{+}(a) \equiv \exists b [P_{\epsilon}^{+}(b, a) \& P_{\Psi}^{+}(b)]$$

$$P_{\Phi}^{-}(a) \equiv \forall b [P_{\epsilon}^{-}(b, a) \vee P_{\Psi}^{-}(b)]$$

次に Φ が F を含む場合を示す. induction step は上と同じだから, $\Phi(v) = F(v)$ の場合を示せばよい.

$$P_{\Phi}^{+}(a) \equiv a \in O^F \& C_a \text{ is a function} \& \exists e [C_a = \lambda n \{e\}^F(n) \& F(\lambda n \{e\}^F(n)) = 0]$$

$$P_{\Phi}^{-}(a) \equiv a \in O^F \& [C_a \text{ is a function} \rightarrow \exists e (C_a = \lambda n \{e\}^F(n) \& F(\lambda n \{e\}^F(n)) = 1)]$$

従って上に証明したことを用いて P_{Φ}^{+} , P_{Φ}^{-} は F -semirec. であることがわかる. \square

transitive set A は $\langle A, \in, A \cap F \rangle$ が KP の model になるとき F -admissible set であるという. $L(\omega_1)$ が admissible であると同様に次の定理が成り立つ.

定理 4.5 $L_F(\omega_1^F)$ は F -admissible である.

(証明) $L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0 -Collection を除いた KP の公理を満たすことは、 L が ΣF の model になることの証明と同様にして証明される (Gödel [6]). そこで $L_F(\omega_1^F)$ が Δ_0 -Collection を満たすことを証明する. $\bar{\Phi}(x, y)$ を任意の $\Delta_0(F)$ formula, $a \in O^F$ とし,

$$\langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle \models \forall x \in C_a \exists y \bar{\Phi}(x, y)$$

が成り立つものとする. $A = \{x \in O^F \mid x <_o^F a\}$ とすると, A は F -rec. であって

$$\forall x \in A \exists y [P_e^-(x, a) \vee P_{\bar{\Phi}}^+(x, y)]$$

系 2.2 により F -rec. func. $\theta(x)$ で

$$\forall x \in A [P_e^-(x, a) \vee P_{\bar{\Phi}}^+(x, \theta(x))]$$

$$x \notin A \rightarrow \theta(x) = 0$$

なるものが存在する. θ は

$$x \in A \iff \theta(x) \in O^F$$

を満たすから Boundedness Theorem により $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_o^F < \omega_1^F$. そこで $b \in O^F$ を $\sup_{x \in A} |\theta(x)|_o^F < |b|_o^F$, $N(|b|_o^F) = 0$ なるようにとれば,

$$\forall x \in C_a \exists y \in C_b \bar{\Phi}(x, y)$$

従って Δ_0 -Collection が成り立つ. \square

$\mathcal{A} = \langle L_F(\omega_1^F), \in, F \cap L_F(\omega_1^F) \rangle$ とすると,

定理 4.6 $P \subseteq \omega$ に対し,

(1) P が F -rec. $\Leftrightarrow P$ は Δ_1 on \mathcal{A}

(2) P が F -semirec. $\Leftrightarrow P$ は Σ_1 on \mathcal{A}

(証明) (1) は (2) から直ちに出来るから (2) を証明すればよい.

\Rightarrow . \mathcal{A} での Second Recursion Theorem (Barwise [1] Chap. V 参照) を使えば,

$$\{x\}^F(a_1, \dots, a_n) \simeq t$$

は Σ_1 on \mathcal{A} である.

\Leftarrow . $P(n) \leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists v \Phi(v, n)$ なる $\Delta_0(F)$ -formula Φ をとる. recursive function $\theta(n)$ を

$$\theta(n) \in O^F, \quad C_{\theta(n)} = n$$

なるようにとれば,

$$P(n) \leftrightarrow \exists a P_{\Phi}^+(a, \theta(n))$$

従って P は F -semirec. である. \square

$\langle C_F(\kappa), \in, F \cap C_F(\kappa) \rangle$ が admissible であるとき, κ を F -admissible ordinal という.

定理 4.7 ω_1^F は ω の次の F -admissible ordinal である.

(証明) κ を F -admissible ordinal とする. $C_F(\kappa)$ の中で Second Recursion Theorem を用いることにより

$$\{z\}^F(a_1, \dots, a_m) \simeq b$$

は Σ_1 on $C_F(\kappa)$ となる. 従って特に O^F は Σ_1 on $C_F(\kappa)$.

故に $\omega_1^F \leq \kappa$. \square

F -semirec. set $M \subseteq \omega$ は

(i) $\omega - M$ は無限

(ii) $S \subseteq \omega$ が F -semirec. $\Rightarrow S - M$ または $\omega - (S \cup M)$
が有限

なる条件を満たすとき, maximal とよばれる. Kreisel - Sacks [4] は maximal Π'_1 set の存在を示したが、それと同様にして、

定理 4.7 maximal F -semirec. set が存在する.

参考文献

[1] Barwise: Admissible Sets and Structures, Springer (1975)

[2] Hinman: Recursion-Theoretic Hierarchies, Springer (1978)

[3] Kleene: Recursive functionals and quantifiers of finite type I, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1959) 1-52

[4] Kreisel - Sacks : Metarecursive sets, Jour. Symb. Log. 30 (1965) 318 - 338

[5] Shoenfield ; A hierarchy based on a type 2 object , Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968)

[6] Gödel : The Consistency of the Continuum Hypothesis, Ann. Math. Studies 3 (Princeton Univ. Press).